

基于形函数的非一致网格接触修形新方法^{*}

NEW PROFILE MODIFICATION METHOD OF NON-UNIFORM MESHES BASED ON SHAPE FUNCTION

刘梦^{**1} 刚宪约^{***1} 车业军² 孟朋¹ 张帆¹

(1. 山东理工大学 交通与车辆工程学院, 淄博 255000)

(2. 山东理工职业学院, 济宁 272100)

LIU Meng¹ GANG XianYue¹ CHE YeJun² MENG Peng¹ ZHANG Fan¹

(1. School of Transportation and Vehicle Engineering, Shandong University of Technology, Zibo 255000, China)

(2. Shandong Polytechnic College, Jining 272100, China)

摘要 针对接触压力分布不均导致机械零部件过早失效的问题,提出了一种非一致网格接触修形新方法。基于单元形函数和“虚拟节点”建立了非一致网格接触节点之间的力学关系,推导得到了节点修形量与接触压力之间的数学方程,提出了一种通过最小化最大接触压力求解修形量的极小极大模型,并根据其数学特点将该模型转换为线性规划模型,提高了修形量计算的效率和全局收敛性。通过三个弹性接触修形实例,验证了该方法对一般弹性接触修形问题的适用性和有效性。

关键词 弹性接触修形 接触压力 非一致网格 单元形函数

中图分类号 O343.3

Abstract A new profile modification method of non-uniform meshes was proposed to solve the problem of premature failure of mechanical components due to uneven contact pressure distribution. Based on the element shape function and "virtual nodes", a formula was developed to formulate the mechanical relation between the contact nodes of the non-uniform mesh, a mathematical equation was derived to formulate the correspondence between the node modification and the contact pressure, and a minimax model was developed to solve the modification by minimizing the maximum contact pressure. In order to improve global convergence and computational efficiency of the modification calculation, the minimax model was transformed into a linear programming model. The applicability and effectiveness of this new profile modification method for general elastic contact modification problems was verified by three elastic contact modification examples.

Key words Profile modification of elastic interface; Contact pressure; Non-uniform mesh; Element shape function

Corresponding author: GANG XianYue, E-mail: gangxianyue@sdu.edu.cn

The project supported by the National Science Foundation of Shandong Province(No. ZR2020ME140).

Manuscript received 20220906, in revised form 20221102.

0 引言

轴承、齿轮、螺纹等基础零部件对整机的安全性和稳定性起着重要的作用。接触压力分布不均造成此类零部件过早失效的重要原因之一。以轴承为例,滚子在外载荷作用下会压入滚道一微小的深度,位于滚子端部外侧的滚道处于拉伸状态,滚子端部的接触压力明显高于中间部位,这种现象称为“边缘效应”。此现象导致滚子端部和滚道两侧过早地产生疲劳破坏。通过对接触交界面微量修形改善接触压力分布是有效

提高零部件的强度和可靠性的重要措施之一。20世纪30年代,LUNDBERG G^{[1]201-211}在赫兹接触理论的基础上,提出了一种改善轴承滚子接触母线压力分布的对数母线修形设计方法。RAMU B等^[2-3]证明了对数修形曲线能够产生比较均匀的接触压力,有效消除“边缘效应”现象。SHEVCHENKO S等^[4]采用滚子母线凸圆弧、滚道母线凹圆弧的方式对某单列圆锥滚子进行修形,也在一定程度上降低了轴承的接触压力峰值。WU Z等^[5]基于滚子角度偏差建立了两种对数凸度模型,结果表明,这两种模型在保证接触特性的条件

^{*} 20220906收到初稿,20221102收到修改稿。山东省自然科学基金项目(ZR2020ME140)资助。

^{**} 刘梦,女,1997年生,山东潍坊人,汉族,山东理工大学交通与车辆工程学院硕士研究生,主要研究方向为车辆系统动力学。

^{***} 刚宪约(通信作者),男,1977年生,山东济南人,汉族,山东理工大学交通与车辆工程学院教授,博士,主要研究方向为车辆系统动力学、车辆轻量化技术。

下能够有效消除“边缘效应”现象。TUDOSE L 等^[6]在特定的轴承载荷范围内,提出了一种求解圆柱轴承滚子最佳轮廓的方法。吴东磊^[7]采用遗传算法对非对称滚子母线修形,得到了最佳非对称对数修形曲线。王文杰等^[8]通过分析偏载系数对接触压力的影响,发现在特定工况下存在最优的偏载系数,能够有效降低接触应力,提高偏载工况下轴承的疲劳寿命。沈海涛等^[9]将接触应力方差作为目标函数,采用遗传优化算法和对数母线修形法求解修形量,其遗传迭代数会对计算结果产生很大的影响。以上研究都是针对特定条件下的具体零部件,通过预先假设的轮廓曲线,经多次迭代计算后求出精确修形量,并未形成通用的求解一般弹性接触问题修形量的方法。对于复杂的弹性接触问题,无法通过已知的特征曲线直接得到最佳的修形结果。

接触界面修形实际上是一个节点与几何曲线无法确定的非线性拓扑优化问题。一般采用有限元方法作为结构修形分析的工具,结构简单的接触构件容易实现接触区域网格之间的相互对齐,但是复杂接触界面的网格划分很难实现接触节点严格对齐,无法直接描述接触节点之间力与位移的关系。本文基于弹性接触力学本质以及有限元理论,提出了一种通用的基于单元形函数的非一致网格接触修形新方法。通过形函数推导出接触节点之间力和位移的关系,以最小化最大接触压力为目标求解修形量。

1 非一致网格节点对应关系

图 1 所示为三维构件非一致网格接触示意。由图 1 可知,上、下构件的单元网格明显未对齐,从中选取接触区域的一个单元进行分析,如图 2 所示。

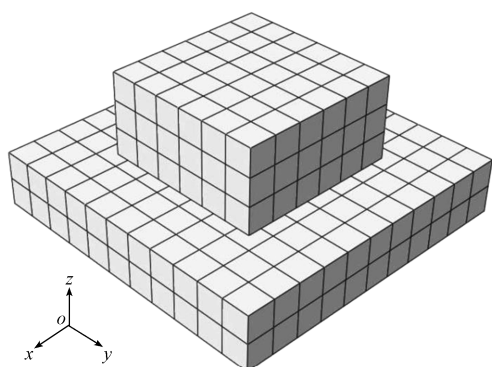


图 1 三维构件非一致网格接触示意图

Fig. 1 Schematic diagram of non-uniform mesh contact of 3D components

图 2 所示的节点 1、2、3、4 属于下构件,上构件在这 4 个节点围成的四边形区域内存在一个接触节点 Q 。定义由节点 1、2、3、4 围成的四边形区域为下构件接触界面单元,上构件节点 Q 在该单元上的法向投影为一个“虚拟节点” q ,它属于下构件的接触界面

单元,与节点 1、2、3、4 之间的位移和内力关系采用单元形函数进行描述。

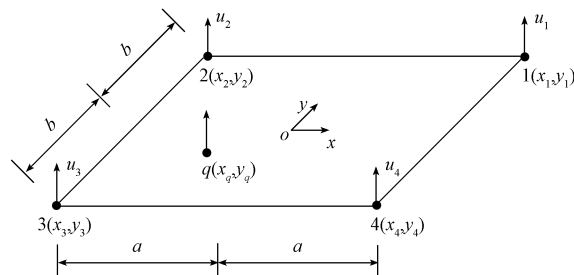


图 2 非一致网格接触局部示意图

Fig. 2 Local schematic diagram of non-uniform mesh contact model

根据有限元法分析理论,可以得到节点 q 与节点 i ($i = 1, 2, 3, 4$) 之间法向位移的关系为

$$\mathbf{u}_q = [N_1, N_2, N_3, N_4] [u_1, u_2, u_3, u_4]^T = \mathbf{N}_q^T \mathbf{u} \quad (1)$$

其中,

$$\mathbf{N}_q = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x_q}{a}\right) \left(1 + \frac{y_q}{b}\right) \\ \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x_q}{a}\right) \left(1 + \frac{y_q}{b}\right) \\ \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x_q}{a}\right) \left(1 - \frac{y_q}{b}\right) \\ \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x_q}{a}\right) \left(1 - \frac{y_q}{b}\right) \end{Bmatrix} \quad (2)$$

式中, $\mathbf{N}_q$ 为关于节点 q 的形状函数矩阵^[10]; $\mathbf{u}$ 为下构件接触界面单元节点的法向位移向量。

假设上构件施加在虚拟节点 q 上的法向节点载荷为 f_q , 可以等效分配到节点 i ($i = 1, 2, 3, 4$) 的节点力为

$$\mathbf{f} = [f_1, f_2, f_3, f_4]^T = -f_q \mathbf{N}_q \quad (3)$$

式中, $\mathbf{f}$ 为下构件接触界面单元节点的节点力向量。

2 非一致网格弹性接触修形方法

2.1 修形量与接触压力之间的关系

以图 3 所示弹性-弹性接触模型为例,假设构件 α 接触节点个数为 m , 构件 β 接触单元节点个数为 n 。上、下构件刚度矩阵 $\mathbf{K}$ 、各节点位移 $\mathbf{u}$ 和节点力 $\mathbf{f}$ 之间的力学关系为

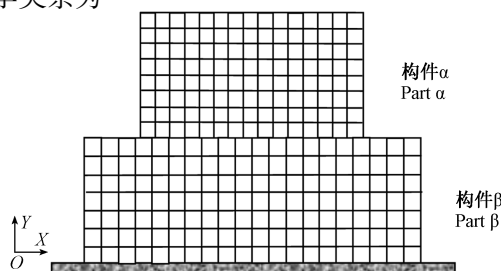


图 3 非一致网格接触模型

Fig. 3 Non-uniform mesh contact model

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II}^{\alpha} & \mathbf{K}_{IB}^{\alpha} & \mathbf{K}_{IC}^{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{BI}^{\alpha} & \mathbf{K}_{BB}^{\alpha} & \mathbf{K}_{BC}^{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{CI}^{\alpha} & \mathbf{K}_{CB}^{\alpha} & \mathbf{K}_{CC}^{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{CC}^{\beta} & \mathbf{K}_{CB}^{\beta} & \mathbf{K}_{CI}^{\beta} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{BC}^{\beta} & \mathbf{K}_{BB}^{\beta} & \mathbf{K}_{BI}^{\beta} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{IC}^{\beta} & \mathbf{K}_{IB}^{\beta} & \mathbf{K}_{II}^{\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_I^{\alpha} \\ \mathbf{u}_B^{\alpha} \\ \mathbf{u}_C^{\alpha} \\ \mathbf{u}_C^{\beta} \\ \mathbf{u}_B^{\beta} \\ \mathbf{u}_I^{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_I^{\alpha} \\ \mathbf{f}_B^{\alpha} \\ \mathbf{f}_C^{\alpha} \\ \mathbf{f}_C^{\beta} \\ \mathbf{f}_B^{\beta} \\ \mathbf{f}_I^{\beta} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

式中,上标 α 、 β 分别表示构件 α 和构件 β ;下标I、B、C分别表示内部自由度 (Inner Degrees of Freedom, IDOFs)、位移约束自由度 (Boundary DOFs) 和接触自由度 (Contact DOFs)。

为了实现两构件接触节点的相互对应,对构件 α 进行接触载荷分解,即将接触载荷从虚拟节点分配到构件 β 的对应交界面单元节点,方程组(4)可改写为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II}^{\alpha} & \mathbf{K}_{IB}^{\alpha} & \mathbf{K}_{IC}^{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{BI}^{\alpha} & \mathbf{K}_{BB}^{\alpha} & \mathbf{K}_{BC}^{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{NK}_{CI}^{\alpha} & \mathbf{NK}_{CB}^{\alpha} & \mathbf{NK}_{CC}^{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{CC}^{\beta} & \mathbf{K}_{CB}^{\beta} & \mathbf{K}_{CI}^{\beta} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{BC}^{\beta} & \mathbf{K}_{BB}^{\beta} & \mathbf{K}_{BI}^{\beta} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{IC}^{\beta} & \mathbf{K}_{IB}^{\beta} & \mathbf{K}_{II}^{\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_I^{\alpha} \\ \mathbf{u}_B^{\alpha} \\ \mathbf{u}_C^{\alpha} \\ \mathbf{u}_C^{\beta} \\ \mathbf{u}_B^{\beta} \\ \mathbf{u}_I^{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_I^{\alpha} \\ \mathbf{f}_B^{\alpha} \\ \mathbf{Nf}_C^{\alpha} \\ \mathbf{f}_C^{\beta} \\ \mathbf{f}_B^{\beta} \\ \mathbf{f}_I^{\beta} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

式中, $\mathbf{N}$ 为由下构件所有虚拟节点的形状函数矩阵组成的矩阵。

假设位移约束边界固定,即 $\mathbf{u}_B^{\alpha} = 0$ 、 $\mathbf{u}_B^{\beta} = 0$,删除方程组(5)中对应的行、列,整理后可得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II}^{\alpha} & \mathbf{K}_{IC}^{\alpha} & 0 & 0 \\ \mathbf{NK}_{CI}^{\alpha} & \mathbf{NK}_{CC}^{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{CC}^{\beta} & \mathbf{K}_{CI}^{\beta} \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{IC}^{\beta} & \mathbf{K}_{II}^{\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_I^{\alpha} \\ \mathbf{u}_C^{\alpha} \\ \mathbf{u}_C^{\beta} \\ \mathbf{u}_I^{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_I^{\alpha} \\ \mathbf{Nf}_C^{\alpha} \\ \mathbf{f}_C^{\beta} \\ \mathbf{f}_I^{\beta} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

由式(3)可得施加在构件 α 接触节点上的法向节点载荷等效分配到构件 β 接触节点的节点力为

$$\mathbf{f}_C^{\beta} = -\mathbf{Nf}_C^{\alpha} \quad (7)$$

将方程组(6)中第2个方程与第3个方程相加,可得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II}^{\alpha} & \mathbf{K}_{IC}^{\alpha} & 0 & 0 \\ \mathbf{NK}_{CI}^{\alpha} & \mathbf{NK}_{CC}^{\alpha} & \mathbf{K}_{CC}^{\beta} & \mathbf{K}_{CI}^{\beta} \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{IC}^{\beta} & \mathbf{K}_{II}^{\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_I^{\alpha} \\ \mathbf{u}_C^{\alpha} \\ \mathbf{u}_C^{\beta} \\ \mathbf{u}_I^{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_I^{\alpha} \\ 0 \\ \mathbf{f}_I^{\beta} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

假设只对构件 α 修形,由式(1)可得到构件 α 接触节点修形量 $\mathbf{d} = \mathbf{N}^T \mathbf{u}_C^{\beta} - \mathbf{u}_C^{\alpha}$ 。将其代入方程组(8)可得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II}^{\alpha} & \mathbf{K}_{IC}^{\alpha} & 0 & 0 \\ \mathbf{NK}_{CI}^{\alpha} & \mathbf{NK}_{CC}^{\alpha} & \mathbf{K}_{CC}^{\beta} & \mathbf{K}_{CI}^{\beta} \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{IC}^{\beta} & \mathbf{K}_{II}^{\beta} \\ 0 & -\mathbf{E} & \mathbf{N}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_I^{\alpha} \\ \mathbf{u}_C^{\alpha} \\ \mathbf{u}_C^{\beta} \\ \mathbf{u}_I^{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_I^{\alpha} \\ 0 \\ \mathbf{f}_I^{\beta} \\ \mathbf{d} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

根据方程组(9)中第1、2、4个方程可得位移向量 $\mathbf{u}_I^{\alpha}$ 、 $\mathbf{u}_C^{\alpha}$ 与 $\mathbf{u}_I^{\beta}$ 的数学关系式,即

$$\mathbf{u}_I^{\alpha} = \mathbf{K}_{II}^{\alpha-1} (\mathbf{f}_I^{\alpha} - \mathbf{K}_{IC}^{\alpha} \mathbf{u}_C^{\alpha}) \quad (10)$$

$$\mathbf{u}_C^{\alpha} = \mathbf{N}^T \mathbf{u}_C^{\beta} - \mathbf{d} \quad (11)$$

$$\mathbf{u}_I^{\beta} = \mathbf{K}_{II}^{\beta-1} (\mathbf{f}_I^{\beta} - \mathbf{K}_{IC}^{\beta} \mathbf{u}_C^{\beta}) \quad (12)$$

将式(10)~式(12)代入方程组(9)中的第3个方程,得到构件节点接触自由度位移向量 $\mathbf{u}_C^{\beta}$ 与修形量 $\mathbf{d}$ 之间的关系为

$$\mathbf{u}_C^{\beta} = \tilde{\mathbf{u}}_C + \tilde{\mathbf{K}}_3 \mathbf{d} \quad (13)$$

式中,

$$\tilde{\mathbf{u}}_C = (\tilde{\mathbf{K}}_1 \mathbf{K}_{IC}^{\alpha} \mathbf{N}^T + \tilde{\mathbf{K}}_2 \mathbf{K}_{IC}^{\beta} - \mathbf{NK}_{CC}^{\alpha} \mathbf{N}^T - \mathbf{K}_{CC}^{\beta})^{-1} (\tilde{\mathbf{K}}_1 \mathbf{f}_I^{\alpha} + \tilde{\mathbf{K}}_2 \mathbf{f}_I^{\beta}) \quad (14)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_3 = (\tilde{\mathbf{K}}_1 \mathbf{K}_{IC}^{\alpha} \mathbf{N}^T + \tilde{\mathbf{K}}_2 \mathbf{K}_{IC}^{\beta} - \mathbf{NK}_{CC}^{\alpha} \mathbf{N}^T - \mathbf{K}_{CC}^{\beta})^{-1} (\tilde{\mathbf{K}}_1 \mathbf{K}_{IC}^{\alpha} + \mathbf{NK}_{CC}^{\alpha}) \quad (15)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_1 = \mathbf{NK}_{CI}^{\alpha} \mathbf{K}_{II}^{\alpha-1}$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_2 = \mathbf{K}_{CI}^{\beta} \mathbf{K}_{II}^{\beta-1}$$

将式(13)代入式(12),得到下构件节点无约束自由度位移向量 $\mathbf{u}_I^{\beta}$ 与修形量 $\mathbf{d}$ 之间的关系为

$$\mathbf{u}_I^{\beta} = \tilde{\mathbf{u}}_I + \tilde{\mathbf{K}}_4 \mathbf{d} \quad (16)$$

式中,

$$\tilde{\mathbf{u}}_I = \mathbf{K}_{II}^{\beta-1} (\mathbf{f}_I^{\beta} - \mathbf{K}_{IC}^{\beta} \tilde{\mathbf{u}}_C) \quad (17)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_4 = -\mathbf{K}_{II}^{\beta-1} \mathbf{K}_{IC}^{\beta} \tilde{\mathbf{K}}_3 \quad (18)$$

由方程组(6)的第3个方程可得

$$\mathbf{f}_C^{\beta} = \mathbf{K}_{CC}^{\beta} \mathbf{u}_C^{\beta} + \mathbf{K}_{CI}^{\beta} \mathbf{u}_I^{\beta} \quad (19)$$

将式(7)、式(13)、式(16)代入式(19),可得构件 α 的接触节点力 $\mathbf{f}_C^{\alpha}$ 与修形量 $\mathbf{d}$ 的关系为

$$\mathbf{f}_C^{\alpha} = -\mathbf{N}^{-1} (\mathbf{K}_{CC}^{\beta} \mathbf{u}_C^{\beta} + \mathbf{K}_{CI}^{\beta} \mathbf{u}_I^{\beta}) = \tilde{\mathbf{f}}_C + \tilde{\mathbf{K}}_5 \mathbf{d} \quad (20)$$

其中,

$$\tilde{\mathbf{f}}_C = -\mathbf{N}^{-1} (\mathbf{K}_{CC}^{\beta} \tilde{\mathbf{u}}_C + \mathbf{K}_{CI}^{\beta} \tilde{\mathbf{u}}_I) \quad (21)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_5 = -\mathbf{N}^{-1} (\mathbf{K}_{CC}^{\beta} \tilde{\mathbf{K}}_3 + \mathbf{K}_{CI}^{\beta} \tilde{\mathbf{K}}_4) \quad (22)$$

式中, $\tilde{\mathbf{f}}_C$ 为构件 α 修形前的节点接触力向量; $\tilde{\mathbf{K}}_5$ 为接触节点单位修形量引起的节点接触力变化量。

接触压力向量 $\mathbf{p}_C$ 与节点接触力向量 $\mathbf{f}_C^{\alpha}$ 之间的关系可以表示为

$$\mathbf{f}_c^\alpha = \mathbf{A}\mathbf{p}_c \quad (23)$$

其中, $\mathbf{A}$ 为接触力分解的系数矩阵, 可表示为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & i \notin j \\ \mathbf{N}_i^j(\text{GC})\mathbf{A}_j & i \in j \end{cases}$$

式中, $i \in j$ 为节点 i 属于接触界面单元 j ; $\mathbf{A}_j$ 为接触界面单元 j 的面积或长度; $\mathbf{N}_i^j(\text{GC})$ 为在接触界面单元 j 内, 单元 j 的几何中心 GC 对应的节点 i 的形函数。

2.2 基于极小极大模型的线性规划模型

以构件 α 各接触节点的接触压力为目标, 建立的极小极大模型表示为

$$\begin{cases} \min \max(\mathbf{p}_c) \\ \text{s. t. } \mathbf{A}\mathbf{p}_c \geq 0 \end{cases} \quad (24)$$

该约束方程表示接触构件之间存在不可侵入条件。极小极大模型通过控制最危险点的安全性以提高整体安全性。但其本质上属于多目标规划范畴, 数学上的非线性和不可微性影响求解的效率及收敛性。因此, 将该模型转化为存在全局最优解的线性规划模型:

$$\begin{cases} \min \hat{p} = \min \max(p_i) \\ \text{s. t. } \tilde{\mathbf{f}}_c + \tilde{\mathbf{K}}_5 \mathbf{d} \geq 0 \\ \tilde{\mathbf{K}}_5 \mathbf{d} - \mathbf{A}\hat{p} \leq -\tilde{\mathbf{f}}_c \end{cases} \quad (25)$$

式中, $p_i (i=1, 2, \dots, m)$ 为构件 α 的节点接触力。第 1 个约束条件为构件 α 每个接触节点的节点力不小于零, 第 2 个约束条件为构件 α 每个接触节点的接触压力都不大于 $\hat{p}$ 。该模型在数学上与极小极大模型式 (24) 是完全等价的, 但可以通过成熟的线性规划算法进行高效求解。

2.3 修形步骤

上文阐述了非一致网格接触修形的优化模型, 该算法的具体实施步骤如下:

1) 对原始结构进行有限元分析, 通过第 2 节方法求出可表示接触构件之间的节点关系的形状函数矩阵 $\mathbf{N}$ 。

2) 对结构进行总刚度矩阵的装配, 并构造方程组 (6) 中对应接触自由度、内部自由度、位移约束自由度的分块矩阵。

3) 通过式 (15)、式 (18)、式 (22) 分别计算刚度矩阵 $\tilde{\mathbf{K}}_3$ 、 $\tilde{\mathbf{K}}_4$ 、 $\tilde{\mathbf{K}}_5$, 并通过式 (14)、式 (17)、式 (21) 计算出未修形的节点力向量 $\tilde{\mathbf{f}}_c$ 。

4) 通过式 (25) 所定义的线性规划模型求解接触

节点的修形量。

5) 将修形量施加于原始结构模型, 校验验证修形结果。

3 数值案例

为验证本文所提出的非一致网格交界面修形方法的适用性, 本节给出了 3 个弹性接触修形实例。

3.1 平面接触问题

3.1.1 弹性-弹性静定结构接触模型

如图 4 所示, 两弹性板相接触, 弹性模量 $E = 200 \text{ GPa}$, 泊松比 $\nu = 0.3$ 。对上弹性板施加辅助约束, 使其不产生 x 方向的刚性位移, 对下弹性板底部施加全约束。在上弹性板右侧上表面施加 $p = 250 \text{ N/mm}$ 竖直向下的均布载荷。在 Abaqus 软件中采用平面应力单元 CPS4R 对构件进行网格划分, 上弹性板接触节点为 30 个, 下弹性板接触节点为 31 个, 单元网格存在明显的错位。

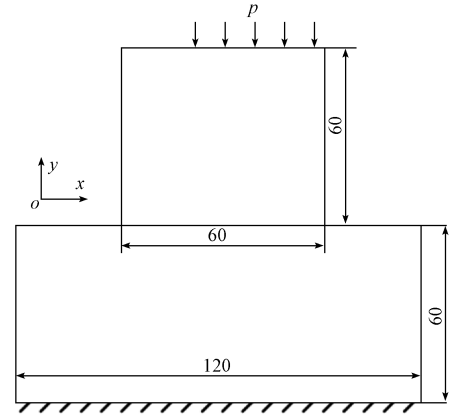


图 4 静定结构接触模型

Fig. 4 Static structure contact model

通过优化模型计算出上弹性板接触节点的修形量 d , 如图 5 所示。由图 5 可以看出, 弹性板两端的修形量明显大于中部位置。

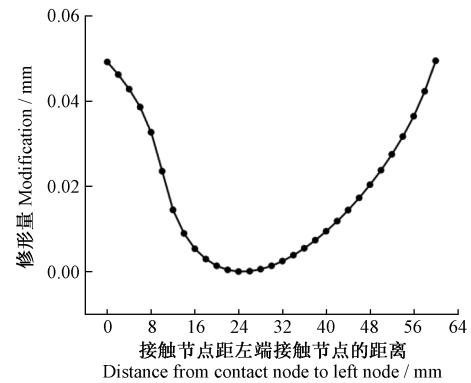


图 5 上弹性板接触节点修形量曲线

Fig. 5 Modification curve of contact node of upper elastic plate

将修形量施加到上弹性板上, 修形前后接触区域压力分布对比如图 6 所示。由图 6 可以看出, 修形前上弹

性板接触压力的整体趋势为从左向右逐渐增大,接触压力曲线的两侧形状产生突变,出现了“边缘效应”,最大接触压力达到了 618.8 MPa。修形后上弹性板左端节点与下弹性板存在间隙或处于临界接触状态,接触压力为 0,其余位置接触节点压力维持在 250 MPa,较修形前降低了 59.6%,消除了应力集中现象。

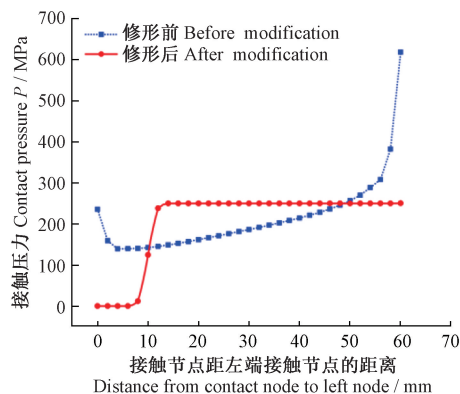


图 6 修形前后上弹性板接触压力分布

Fig. 6 Contact pressure distribution of upper elastic plate before and after the modification

修形前后结构 Mises 应力分布分别如图 7、图 8 所示。修形前接触区域两端出现应力集中现象,应力最大值为 675.7 MPa。修形后接触区域的应力集中现象消失,上弹性板左端应力大小为 0,其余位置应力基本实现均匀分布,最大应力较未修形前降低了 61.9%,达到了修形的效果。

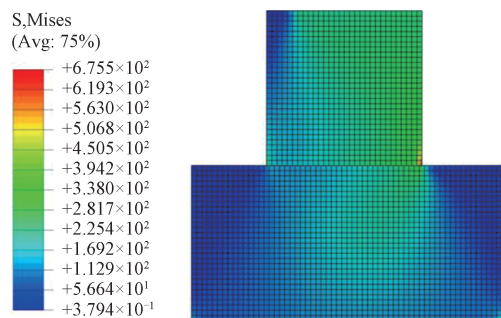


图 7 修形前结构 Mises 应力云图

Fig. 7 Mises stress nephogram of the structure before modification

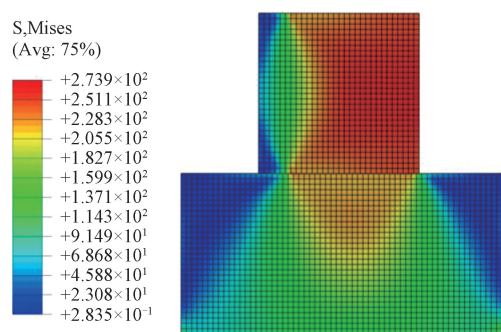


图 8 修形后结构 Mises 应力云图

Fig. 8 Mises stress nephogram of the structure after modification

3.1.2 弹性-弹性超静定结构接触模型

如图 9 所示的两弹性薄板相接触,弹性模量 $E = 200 \text{ GPa}$,泊松比 $\nu = 0.3$ 。在上弹性板施加图 9 所示的外载荷 $F = 2100 \text{ N}$,上弹性板约束 x 方向自由度,下弹性板底部全约束。在 Abaqus 中采用平面应力单元 CPS4R 对构件进行网格划分,其中上弹性板接触节点为 11 个,下弹性板接触节点为 12 个,单元网格存在明显的错位。

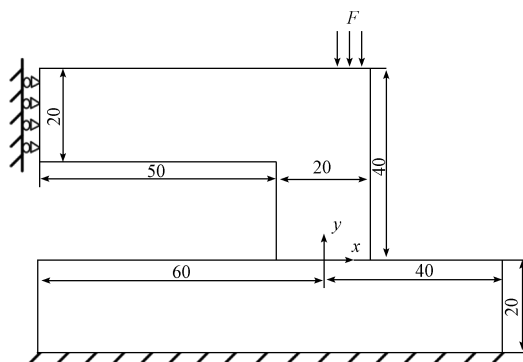


图 9 超静定结构接触模型

Fig. 9 Contact model of the statically indeterminate structure

图 10 所示为上弹性板各接触节点的修形量,因上弹性板最右侧接触节点的接触压力最大,所以该节点的修形量也达到了最大值。

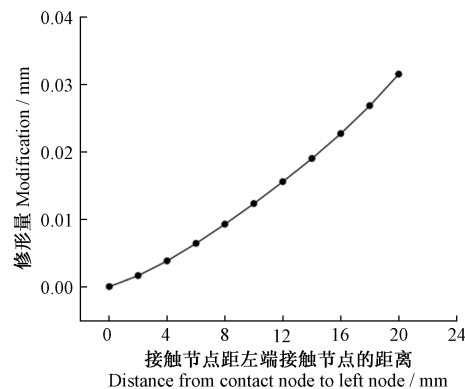


图 10 接触节点修形量曲线

Fig. 10 Modification curve of the contact node

将所求修形量施加于上弹性板,修形前后接触区域压力分布对比如图 11 所示。由图 11 可以看出,修形前上弹性板右端出现“边缘效应”,导致此处接触压力明显高于其他部位,最大接触压力达到 220.1 MPa。修形后上弹性板“边缘效应”消失,且接触节点压力维持在 105 MPa,较修形前最大接触压力降低了 52.3%。

修形前后结构 Mises 应力分布分别如图 12、图 13 所示。未修形时,上弹性板右端接触区域出现应力集中,应力最大值为 239.5 MPa。修形后上弹性板接触区域的应力集中现象消失,应力值维持在 107.1 MPa,最大应力较修形前降低了 55.9%。

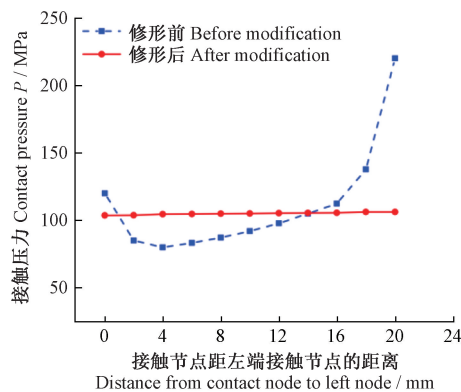


图 11 修形前后上弹性板接触压力分布

Fig. 11 Contact pressure distribution of upper elastic plate before and after modification

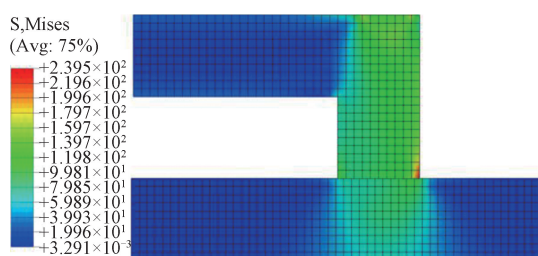


图 12 修形前结构 Mises 应力云图

Fig. 12 Mises stress nephogram of the structure before modification

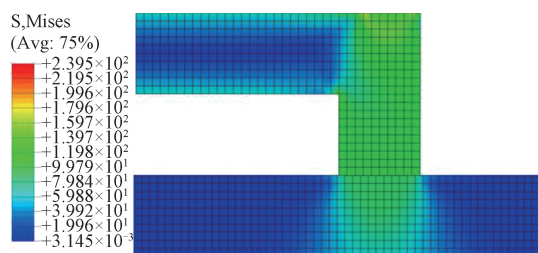


图 13 修形后结构 Mises 应力云图

Fig. 13 Mises stress nephogram of the structure after modification

3.2 空间接触问题

以单个圆柱滚子与弹性板接触为例,在均载情况下,对本文修形方法与传统 LUNDBERG G^{[1] 201-211} 的工程对数曲线修形方法进行对比修形研究^[11]。

如图 14 所示,一个直径为 20 mm、长度为 27 mm 的圆柱滚子和一个尺寸为 45 mm × 30 mm × 5 mm 的弹性板相接触,两弹性板的弹性模量 $E = 200$ GPa,泊松比 $\nu = 0.3$ 。在 Abaqus 软件中采用 8 节点线性实体单元 C3D8 分别对两构件进行网格划分,网格尺寸为 1 mm,在滚子的母线上施加 $p = 2\,000$ N/mm 竖直向下的均布载荷,其接触区域的有限元模型如图 14 所示,单元网格存在明显的错位。

通过本文修形方法和传统 LUNDBERG G 的方法^{[1] 201-211} 得到的修形量如图 15 所示。由图 15 可以看出,两种方法在滚子两端处的修形量大于中间部位,并且传统 LUNDBERG G 的方法^{[1] 201-211} 在滚子两端的

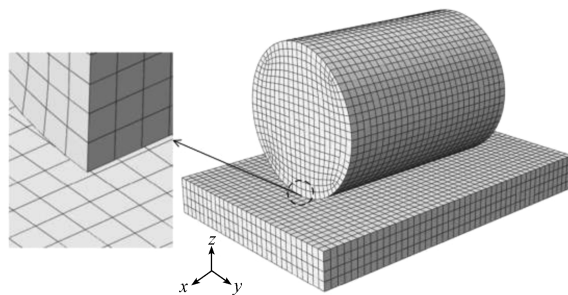


图 14 空间接触有限元模型

Fig. 14 Space contact finite element model

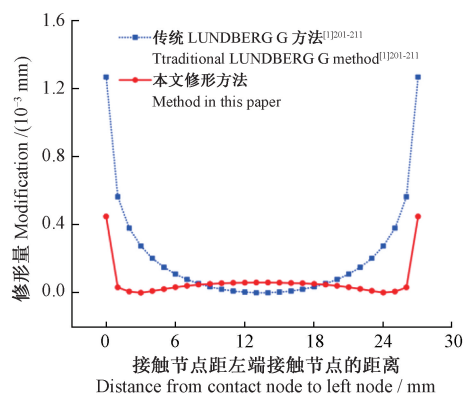


图 15 两种方法接触节点修形量

Fig. 15 Modification of contact nodes by two methods

修形量明显大于本文修形方法所求的修形量。

将两种修形方法所求得的修形量施加于圆柱滚子,得到如图 16 所示的接触压力对比曲线。由图 16 可以看出,修形前接触压力最小值为 198.9 MPa,由于“边缘效应”,滚子两端接触压力明显增大,达到了 236.2 MPa。采用传统 LUNDBERG G 的方法^{[1] 201-211} 修形后,有效降低了最大接触压力,但是由于端部修形量过大,导致滚子两端接触压力明显低于中部。采用本文方法修形后,不仅降低了最大接触压力,各节点接触压力也实现均匀分布。

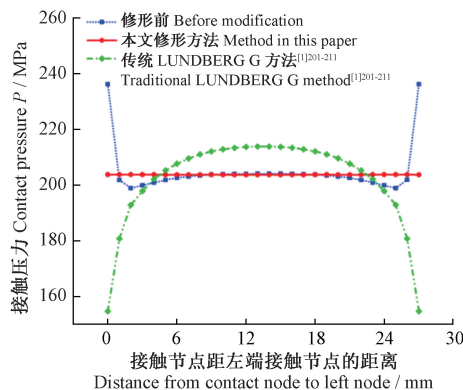


图 16 两种方法修形后接触压力对比

Fig. 16 Comparison of contact pressures after modification by two methods

通过对比两种修形方法的接触压力可知,传统

LUNDBERG G 方法^[1] 201-211 可以消除“边缘效应”,但是无法实现接触压力的均匀分布。而本文修形方法不仅可以更有效地降低接触压力峰值,消除“边缘效应”,而且能够保证接触面上获得最佳的接触压力分布。因此,本文所述方法具有更好的修形效果。

4 结论

本文基于形函数推导出构件之间接触节点的对应关系,并通过修形量与接触压力之间的数学关系建立了极小化极大接触压力的非一致网格接触修形方法,通过理论推导与实例分析可得以下结论:

1)采用形函数法解决了非一致网格接触节点无法一一对应的问题,并通过算例验证了其应用在非一致网格接触修形上的有效性。

2)本文所提方法无须预先假定修形轮廓曲线,可直接通过极小化接触压力求得精确修形量,具有很好的通用性。

3)本文所提方法克服了传统修形方法需要反复迭代、计算量大的不足,仅需一次结构分析和低阶线性规划问题的求解便可得到修形量,有效提高了计算效率。

参考文献 (References)

- [1] LUNDBERG G. Elastische berührung zweier halbräume [J]. Forschung Auf Dem Gebiete Des Ingenieurwesens, 1939, 10(5): 201-211.
- [2] RAMU B, MURTHY V. Contact analysis of cylindrical roller bearing using different roller profile[J]. International Journal of Research In Mechanical Engineering & Technology, 2013, 3(1): 29-33.
- [3] WARDA B, CHUDZIK A. Fatigue life prediction of the radial roller bearing with the correction of roller generators [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2014, 89: 299-310.
- [4] SHEVCHENKO S, MUKHOVATY A, KROL O. Geometric aspects of modifications of tapered roller bearings [J]. Procedia Engineering, 2016, 150(C): 1107-1112.
- [5] WU Z H, XU Y Q, DENG S E, et al. Study on logarithmic crowning of cylindrical roller profile considering angular misalignment [J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2020, 34(5): 2111-2120.
- [6] TUDOSE L, TUDOSE C. Roller profiling to increase rolling bearing performances[J]. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2018, 393: 012002.
- [7] 吴东磊. 旋转尾管悬挂器轴承结构优化与滚子母线修形研究 [D]. 北京: 中国地质大学(北京), 2020: 44-52.
WU DongLei. Research on bearing structure optimization and roller generatrix modification of rotating tailpipe hanger [D]. Beijing: China University of Geosciences (Beijing), 2020: 44-52 (In Chinese).
- [8] 王文杰, 邱 明, 董艳方. 偏载工况下修形圆柱滚子轴承接触应力与承载能力分析[J]. 润滑与密封, 2021, 46(10): 59-63.
WANG WenJie, QIU Ming, DONG YanFang. Contact stress and load capacity analysis of modified cylindrical roller bearing under eccentric load[J]. Lubrication Engineering, 2021, 46(10): 59-63 (In Chinese).
- [9] 沈海涛, 安子军. 双激波套筒活齿传动的接触应力分析及其优化[J]. 机械强度, 2021, 43(4): 874-880.
SHEN HaiTao, AN ZiJun. Contact stress analysis and optimization of double shock sleeve movable tooth [J]. Journal of Mechanical Strength, 2021, 43(4): 874-880(In Chinese).
- [10] 曾 攀. 有限元分析及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004: 144-159.
ZENG Pan. Finite element analysis and application[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004: 144-159(In Chinese).
- [11] 马家驹, 徐 文, 刘双表, 等. 对数滚子的工程设计[J]. 轴承, 1997(6): 2-5.
MA JiaJu, XU Wen, LIU ShuangBiao, et al. Engineering design of logarithmic roller[J]. Bearing, 1997(6): 2-5 (In Chinese).